

## 〈波数単位(補足)〉

- ・ 波数( $\tilde{\nu}$ )  $\propto$  エネルギー  $\rightarrow$  エネルギーの単位として使われる.
- ・ J への換算:  $hc_0\tilde{\nu} = h\nu$  なので  $hc_0$  倍 ( $\text{cm}^{-1} \rightarrow \text{m}^{-1}$  の換算も含めると  $100hc_0$  倍) すればよい.

$$1 \text{ cm}^{-1} \rightarrow 100hc_0 [\text{J}] \approx 1.98645 \times 10^{-23} [\text{J}]$$

$$1 \text{ cm}^{-1} \rightarrow 100N_Ahc_0 [\text{J mol}^{-1}] \approx 11.9627 [\text{J mol}^{-1}]$$

- ・  $\text{cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  単位のボルツマン定数は、

$$\tilde{k} = \frac{k}{100hc_0} = \frac{R}{100N_Ahc_0} = 0.69504 [\text{cm}^{-1} \text{ K}^{-1}]$$

- ・ 室温 (298 K) において  $kT \approx 207 \text{ cm}^{-1}$ . 200  $\text{cm}^{-1}$  の振動について  $\frac{h\nu}{kT} \approx \frac{200}{207}$

## 8. 熱力学関数と分配関数

## 8.1 概念

$\Delta G^\circ$  と  $K$  の関係 (Atkins 7.8 [6版 9-18]) から

$$RT \ln K = -\Delta H + T \Delta S \quad (8.1)$$

## [Na 原子]

基底状態と励起状態の平衡定数 (問題 6.1):  $K = \frac{6}{2} \exp\left(-\frac{\Delta E}{RT}\right)$  から

$$RT \ln K = -\Delta E + T R \ln 3 \quad (8.2)$$

(8.1) と比較:  $\Delta H \sim \Delta E$ ,  $\Delta S \sim R \ln 3$

- ・ エントロピー  $\sim R \ln(\text{状態数})$

cf.) ボルツマンのエントロピー:

$$S = k \ln W$$

$W$ : 配置の重率,  $k$  (1 分子あたり)  $\leftrightarrow R$  (1 モルあたり)

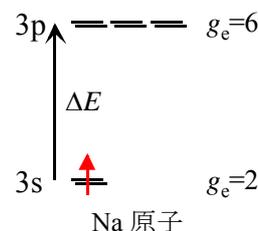
[A  $\leftrightarrow$  B 化学平衡]

平衡定数:  $K = \frac{q_B}{q_A} \exp\left(-\frac{\Delta E}{RT}\right)$  (6.4) から

$$RT \ln K = -\Delta E + T R \ln(q_B / q_A) \quad (8.3)$$

(8.1) と比較:  $\Delta H \sim \Delta E$ ,  $\Delta S \sim R \ln(q_B / q_A)$

- ・ エントロピー  $\sim R \ln(\text{分配関数 or 実効状態数})$



## 8.2 内部エネルギー・熱容量

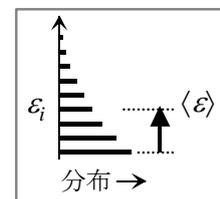
分子の基底状態からの励起エネルギーの期待値 ( $\beta = 1/kT$ )

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \frac{1}{q} \sum_i \varepsilon_i g_i \exp(-\beta \varepsilon_i) \\ &= -\frac{1}{q} \left( \frac{\partial q}{\partial \beta} \right)_V = - \left( \frac{\partial \ln q}{\partial \beta} \right)_V \end{aligned} \quad (8.4)$$

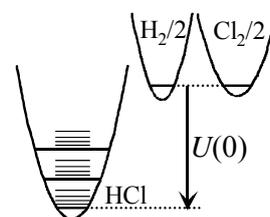
モル内部エネルギー

$${}^m U - {}^m U(0) = N_A \langle \varepsilon \rangle = -N_A \left( \frac{\partial \ln q}{\partial \beta} \right)_V \quad (8.5)$$

$U(0)$  ... 元素単体基準の化学結合エネルギー



励起エネルギーの期待値  $\langle \varepsilon \rangle$



$U(0)$  の意味

モル定容熱容量

$${}^m C_V = \left( \frac{\partial {}^m U}{\partial T} \right)_V \quad (8.6)$$

**[分子運動からの寄与]**

分配関数に (8.5), (8.6) を適用して導く

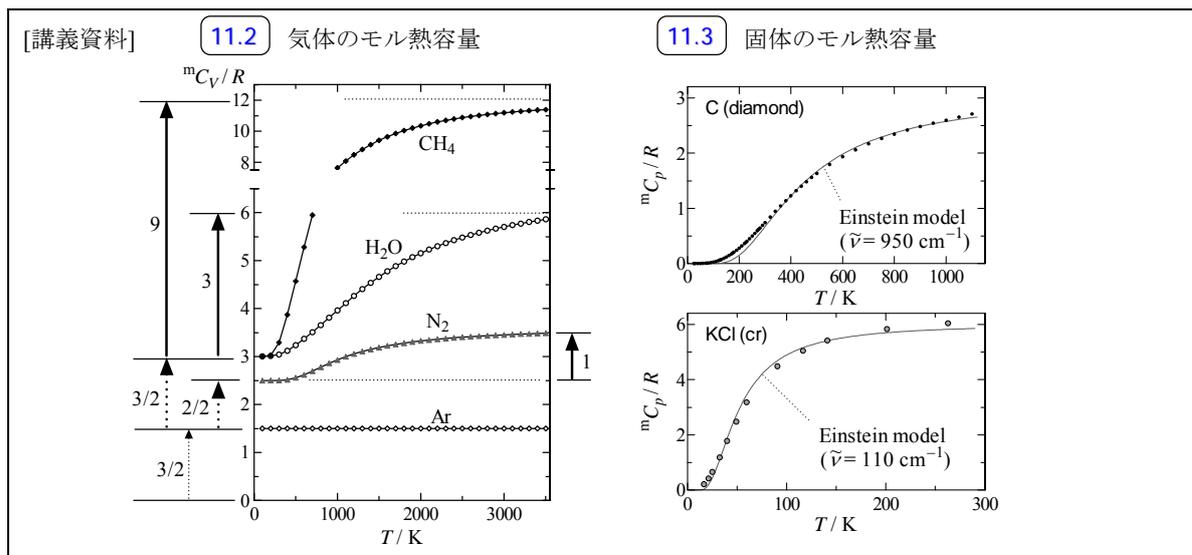
例) (7.10)  $\rightarrow \ln q_{\text{trans}}^\circ = \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi m}{h^2} - \frac{3}{2} \ln \beta$

$\rightarrow$  (8.5)  $\rightarrow {}^m U_{\text{trans}} = -N_A \left( \frac{\partial \ln q_{\text{trans}}^\circ}{\partial \beta} \right)_V = -N_A \left( -\frac{3}{2} \beta^{-1} \right) = \frac{3}{2} N_A kT = \frac{3}{2} RT$

	$\frac{{}^m U}{RT}$	$\frac{{}^m C}{R}$	適用温度領域
並進	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	古典極限 全域 (除: 極低温)
回転 ( $n_r$ : 回転自由度)	$\frac{n_r}{2}$	$\frac{n_r}{2}$	古典極限 全域 (除: 極低温)
1 つの振動 ( $x = \frac{h\nu}{kT}$ )	$\frac{x}{e^x - 1}$	$\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$	全域
	0	0	$T \rightarrow 0$ 低温のみ
	1	1	$T \rightarrow \infty$ (古典極限) 高温のみ

(参考)

単原子 固体	(Einstein 模型)	$\frac{3x}{e^x - 1}$	$\frac{3x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$	$\Delta$ 近似
	(Dulong-Petit 則)	3	3	$T \rightarrow \infty$ (古典極限) $\Delta$ 近似



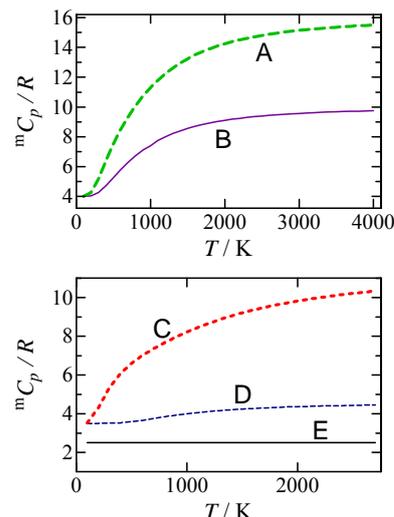
## 問題 8.1

図は 5 種類の完全気体 A~E の定圧モル熱容量 ( ${}^mC_p/R$ ) を示したものである。

- 1) A~E それぞれについて  ${}^mC_{rot}/R$  および古典極限 ( $T \rightarrow \infty$ ) の  ${}^mC_{vib,cl}/R$  を推定せよ。
- 2) A~E は以下の何れか？

Ne, CO, CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>O, SO<sub>2</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>CO, CF<sub>4</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>4</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>

	${}^mC/R$
並進	3/2
回転 ( $n_r$ : 回転自由度=2 or 3)	$n_r/2$
1 つの振動 $\left(x = \frac{h\nu}{kT}\right)$	$\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 (T \rightarrow 0)$ $= 1 (T \rightarrow \infty)$



(解)

- 1) 完全気体では  ${}^mC_p/R = 2.5 + {}^mC_{rot}/R + {}^mC_{vib}/R$  であり

$$T=0 \text{ で } {}^mC_p/R = 2.5 + {}^mC_{rot}/R$$

$$T \rightarrow \infty \text{ で } {}^mC_p/R = 2.5 + {}^mC_{rot}/R + {}^mC_{vib,cl}/R$$

であるから、以下から求めることができる。

$${}^mC_{rot}/R = {}^mC_p/R(T=0) - 2.5$$

$${}^mC_{vib,cl}/R = {}^mC_p/R(T \rightarrow \infty) - {}^mC_p/R(T=0)$$

- 2) 以下から  $n_r, n_v, n_{atom}$  を求めて決定する。

$${}^mC_{rot}/R = n_r/2$$

$${}^mC_{vib,cl}/R = n_v$$

$$n_v = 3n_{atom} - n_r - 3$$

	${}^mC_p/R$ ( $T=0$ )	${}^mC_p/R$ ( $T \rightarrow \infty$ )	${}^mC_{rot}/R$ $= n_r/2$	${}^mC_{vib,cl}/R$ ( $T \rightarrow \infty$ ) $= n_v$	構造	$n_{atom}$	気体
A	4	16	1.5	12	非直線	6	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>
B	4	10	1.5	6	非直線	4	H <sub>2</sub> CO
C	3.5	10.5	1	7	直線	4	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>
D	3.5	4.5	1	1	直線	2	CO
E	2.5	2.5	0	0	原子	1	Ne

## 8.3 エントロピー

$$S = \frac{U - U(0)}{T} + k \ln Q \quad (8.7)$$

$Q$ : 集合分配関数

気体・液体では (固体では  $Q = q^N$ )

$$Q = \frac{q^N}{N!} \quad \text{—— 同種粒子は区別できない} \quad (8.8)$$

Stirling の近似  $\ln x! \approx x \ln x - x$  から

$$\ln Q = N(\ln q - \ln N + 1) \quad (8.9)$$

モルエントロピー

$${}^mS = \frac{{}^mU - {}^mU(0)}{T} + R \left( \ln q^\circ - \ln \frac{p}{k_B T} + 1 \right) \quad (8.10)$$

### [分子運動からの寄与]

	${}^mS / R$
並進	$\frac{5}{2} + \ln q_{\text{trans}}^\circ - \ln \frac{p}{k_B T}$ , あるいは $\frac{3}{2} \ln \frac{m}{\text{amu}} + \frac{5}{2} \ln \frac{T}{\text{K}} - \ln \frac{p}{\text{bar}} - 1.1517$
回転 ( $n_r$ : 回転自由度)	$\frac{n_r}{2} + \ln q_{\text{rot}}$
1つの振動 ( $x = h\nu / kT$ )	$\frac{x}{e^x - 1} - \ln(1 - e^{-x})$
電子状態	$\ln g_{\text{elec}}$

### 問題 8.2

- 298 K, 1 bar における水素原子 H のモルエントロピーを計算せよ<sup>a</sup>。
- 298 K, 1 bar における H<sub>2</sub> のモルエントロピーを計算せよ<sup>b</sup>。振動の寄与は無視できる。
- 298 K, 1 bar における H<sub>2</sub> の分解反応 H<sub>2</sub> → 2H のエントロピー変化 Δ<sub>r</sub>S を求めよ。

	${}^mS / R$
並進	$\frac{3}{2} \ln \frac{m}{\text{amu}} + \frac{5}{2} \ln \frac{T}{\text{K}} - \ln \frac{p}{\text{bar}} - 1.1517$
回転 ( $n_r$ : 回転自由度)	$\frac{n_r}{2} + \ln q_{\text{rot}}$
電子状態	$\ln g_{\text{elec}}$

$$q_{\text{rot}}^{2D} = \frac{kT}{\sigma B} \quad (7.6)$$

\* 必要であれば以下を用いよ。

$c_0$  (真空中の光速) =  $2.99792 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ,  $h$  (プランク定数) =  $6.62607 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ,  
 $R$  (モル気体定数) =  $8.31447 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ ,  $N_A$  (アボガドロ定数) =  $6.02214 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ,  
 $k$  (ボルツマン定数) =  $R / N_A = 1.38065 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 0.695036 \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  
 $m_H$  (<sup>1</sup>H 原子の質量) =  $1.0078 \text{ amu}$ ,  $B$  (H<sub>2</sub> の回転定数) =  $59.336 \text{ cm}^{-1}$ .

<sup>a</sup> 水素原子は  $g_{\text{elec}} = 2$  である。

<sup>b</sup> H<sub>2</sub> は  $\sigma = 2$  の二次元回転子である。

(解)

- ${}^mS(\text{H}) / R = 1.5 \ln(1.0078) + 2.5 \ln(298) - 1.1517 + \ln(2) = 13.7958$ ,  
 ${}^mS(\text{H}) = 13.7958 \times 8.31447 = 114.705 = \underline{114.7 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}$ .
- ${}^mS(\text{H}_2) / R = 1.5 \ln(2.0156) + 2.5 \ln(298) - 1.1517 + 1 + \ln[0.695036 \times 298 / (2 \times 59.336)] = 15.6993$ ,  
 ${}^mS(\text{H}_2) = 15.6993 \times 8.31447 = 130.531 = \underline{130.5 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}$ .
- $\Delta_r S = 114.7 \times 2 - 130.5 = \underline{98.9 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}}$ .

1), 2) Atkins 巻末資料:  ${}^mS(\text{H}) = 114.71$ ,  ${}^mS(\text{H}_2) = 130.684 \text{ (J K}^{-1} \text{ mol}^{-1})$

3) \* 解離は吸熱反応だが、エントロピーを増加(並進)するので高温で起こりやすくなる。