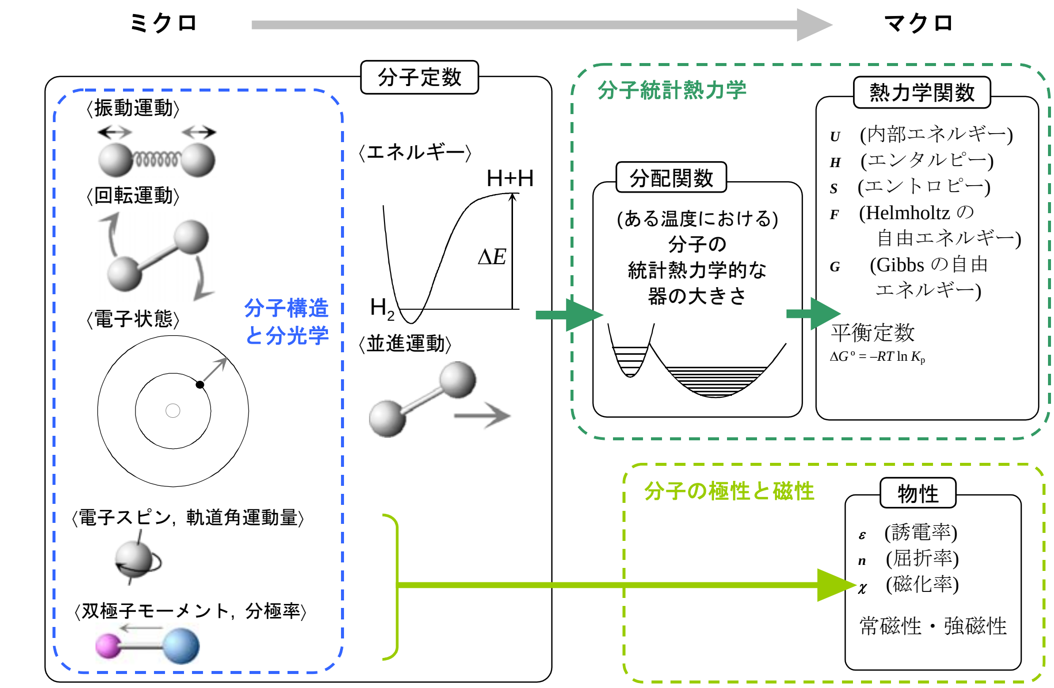
Part 2. 分子統計熱力学

[OHP] 分子のミクロな性質と物質のマクロな性質



第 1 部で分子のミクロな性質･運動を分光学を通して見てきた．第 2 部では物質のマクロな基本的性質である熱力学関数と、ミクロな性質・運動の関係を明確にしていく．

6 熱平衡状態

6.1 ボルツマン分布

熱平衡分子集団中で、分子を状態 i に見出す確率 $\propto \exp\left(-\dfrac{\varepsilon_i}{kT}\right)$

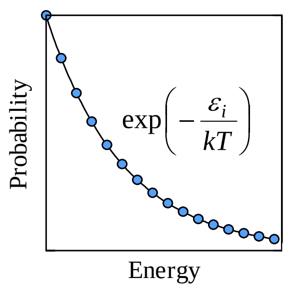
k: ボルツマン定数, T: 絶対温度, ε_i: 状態 i のエネルギー

1 分子あたり　モルあたり

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{E_i}{RT}\right)$$

$$kN_A = R$$

ex.) Br_2 分子を振動励起状態 ($\upsilon = 1$) と基底状態 ($\upsilon = 0$) の存在比
$= \exp(-h\nu_{10} / kT) = 0.21$　(at $T = 298$ K, $\tilde{\nu}_{10} = 323$ cm^{-1})



ボルツマン分布
(縮退のない場合)

状態 i の多重度 g_i を含めると、状態 i にある分子数 n_i は

$$n_i \propto g_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \qquad (6.1)$$

$$\frac{n_i}{N} = \frac{g_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)}{Q} \qquad (6.2)$$

$$N = \sum_i n_i \quad \text{(総分子数)}, \qquad Q = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) \quad \text{(分配関数)}$$

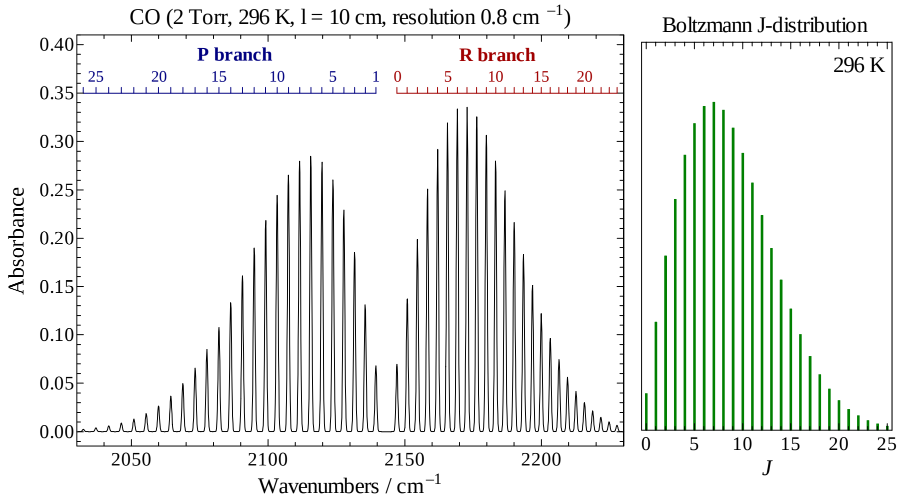
[多重度]

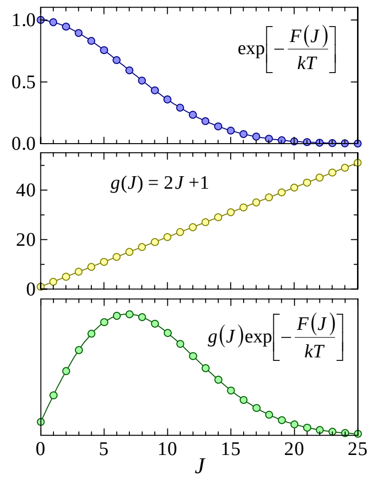
= 縮重度、縮退数 (異なる複数の状態が同じエネルギーに存在する)

振動 : 多重度 $g(\upsilon) = 1$

回転 : 多重度 $g(J) = 2J + 1$ (二次元回転; 直線分子)

[OHP] CO の回転分布 (CO 分子の赤外吸収スペクトルとボルツマン分布)





上の左は 296 K において分圧 2 Torr の気体 CO の赤外吸収スペクトルを、光路長 l = 10 cm のセルで観測したものである。上の右は、同じ温度における、CO の回転状態のボルツマン分布を計算から求めて示したものである。P, R 各枝 (Branch) の強度分布は、ほぼ回転状態の存在比を反映していることがわかる。

左図のように、ボルツマン分布式の指数項は、J に対して単調減少関数であるが、回転多重度は J とともに増加する。 このために回転分布は、ある J でピークを持つ形状を示す。

ex.) CO 赤外吸収の回転線強度分布 ∝ 回転分布

$$= \; n(J) \propto g(J)\exp\left[-\frac{F(J)}{kT}\right] = (2J+1)\exp\left[-\frac{BJ(J+1)}{kT}\right] \qquad (B \sim 1.92\ \mathrm{cm}^{-1})$$

問題 6.1

1) I_2 分子の振動 ($\tilde{\nu}$ = 213 cm^{-1}) を調和振動子と仮定し、$\upsilon = 0$ の存在比を 1 としたときの、室温 (298 K) における、$\upsilon = 1, 2, 3, 4$ の準位の存在比を求めよ。

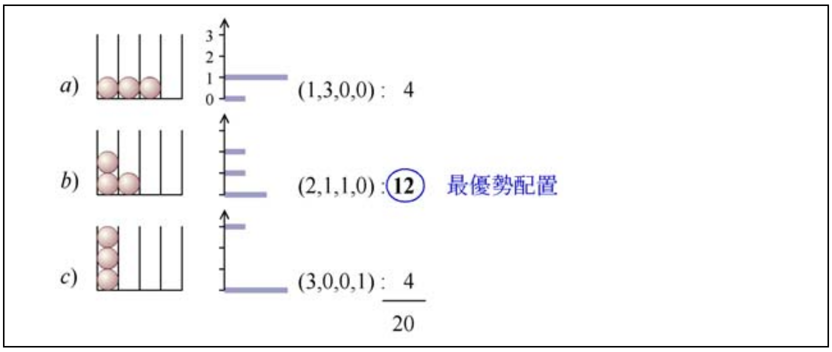
2) 剛体回転子近似のもとに、室温 (298 K) における HI 分子 (B = 6.5 cm^{-1}) の回転分布を求めよ。($J = 0$ を 1 として存在比が 0.2 以下になる J まで計算せよ)

note: $\dfrac{h\nu}{kT} = \dfrac{hc_0\tilde{\nu}}{kT} = 1.4388\dfrac{\tilde{\nu}[\mathrm{cm^{-1}}]}{T[\mathrm{K}]}, \quad \dfrac{B}{kT} = 1.4388\dfrac{B[\mathrm{cm^{-1}}]}{T[\mathrm{K}]}$

6.2 統計力学的裏付

[配置と重率]

***ex*-1)** 4 つの振動子が合計 3$h\nu$ のエネルギーを持つ場合



総重率 $= \dfrac{6!}{3!3!} = 20$

箱は区別するが、玉は区別しないときの場合の数

配置 (n_0, n_1, n_2, n_3)

エネルギー 0, 1, 2, 3 ($h\nu$) の分子の数が n_0, n_1, n_2, n_3

ここでは、*a*), *b*), *c*) の 3 種類

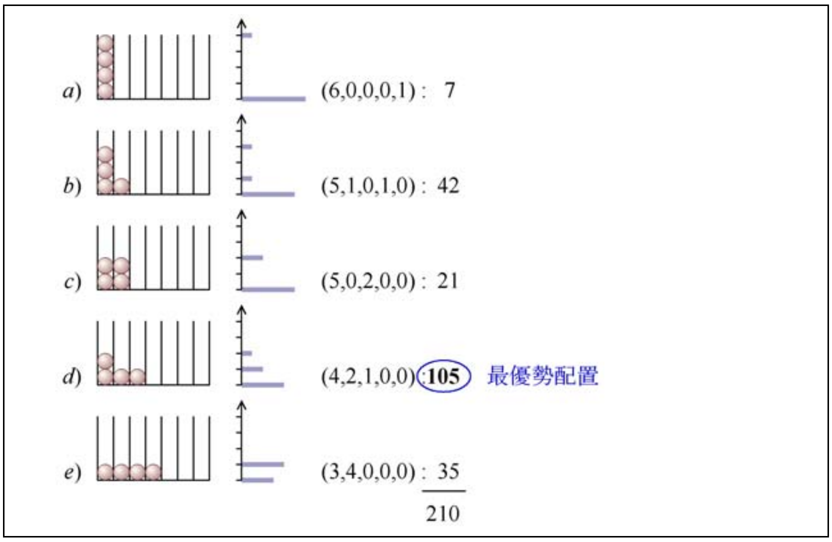
各配置の重率：

$$W(a) = \frac{4!}{1!3!0!0!} = 4, \quad W(b) = \frac{4!}{2!1!1!0!} = 12, \quad W(c) = \frac{4!}{3!0!0!1!} = 4$$

→ 配置 *b*) が最優勢配置

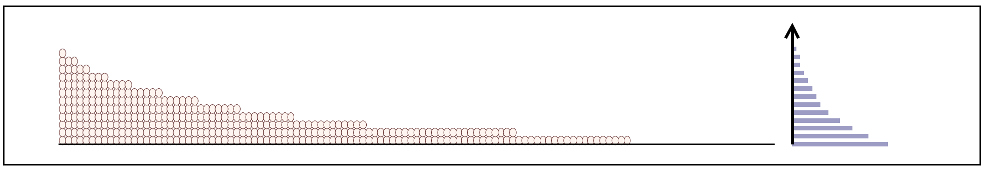
***ex*-2)** 7 つの振動子, 4$h\nu$ のエネルギー

総重率 = 210, 最優勢配置 *d*), $W(d) = 105$



***ex*-3)** *n* 個の振動子, $mh\nu$のエネルギー

$n, m \to \infty$ ボルツマン分布



[ボルツマン分布の導出]

配置 $(n_0, n_1, n_2, \ldots)$ の対数重率

$$\ln W = \ln N! - \sum_i \ln n_i! \qquad (6.3)$$

+ Stirling の近似: $\ln x! = x \ln x - x$

$$\ln W = N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i \qquad (6.4)$$

束縛条件 $\sum_i n_i = N$, $\sum_i \varepsilon_i n_i = E$ のもとでの $\ln W$ の最大値 (未定乗数法を使う)

$$\frac{n_i}{N} = \exp(\alpha - \beta\varepsilon_i) = \frac{\exp\left(-\dfrac{\varepsilon_i}{kT}\right)}{Q} \qquad (6.5)$$